# Diferencijalne jednačine prvog reda

Doc. dr Nevena Mijajlović

Energetika i automatika, Elektronika, telekomunikacije i računarstvo; ETF

Matematika 3

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $P, Q \in C(\mathbb{I})$

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $P, Q \in C(\mathbb{I})$

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$$

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $P, Q \in C(\mathbb{I})$

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$$

## Homogena linearna DJ (HLDJ)

$$y' + P(t)y = 0 \tag{2}$$

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $P, Q \in C(\mathbb{I})$

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$$

## Homogena linearna DJ (HLDJ)

$$y' + P(t)y = 0 \tag{2}$$

- DJ sa razdvojenim promjenljivim

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $P, Q \in C(\mathbb{I})$

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$$

## Homogena linearna DJ (HLDJ)

$$y' + P(t)y = 0 \tag{2}$$

- DJ sa razdvojenim promjenljivim
- $t \in \mathbb{I}$

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $P, Q \in C(\mathbb{I})$

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$$

## Homogena linearna DJ (HLDJ)

$$y' + P(t)y = 0 \tag{2}$$

- DJ sa razdvojenim promjenljivim
- $t \in \mathbb{I}$
- $y \neq 0 \implies \mathbb{J}_1 = (-\infty, 0)$ ili $\mathbb{J}_2 = (0, +\infty)$

## Linearna DJ (LDJ)

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{1}$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $P, Q \in C(\mathbb{I})$

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$$

## Homogena linearna DJ (HLDJ)

$$y' + P(t)y = 0 \tag{2}$$

- DJ sa razdvojenim promjenljivim
- $t \in \mathbb{I}$
- $y \neq 0 \Longrightarrow \mathbb{J}_1 = (-\infty, 0)$ ili $\mathbb{J}_2 = (0, +\infty)$
- Oblast egzistencije i jedinstvenosti: $\mathbb{D}_1 = \mathbb{I} \times \mathbb{J}_1$ ili $\mathbb{D}_2 = \mathbb{I} \times \mathbb{J}_2$

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

- u oblasti $\mathbb{D}_1$ je

$$y = e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

- u oblasti $\mathbb{D}_1$ je
$$y = e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- u oblasti $\mathbb{D}_2$ je
$$y = -e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

- u oblasti $\mathbb{D}_1$ je
$$y = e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- u oblasti $\mathbb{D}_2$ je
$$y = -e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- Rješenje je i funkcija $y = 0,\ t \in \mathbb{I}$

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

- u oblasti $\mathbb{D}_1$ je
$$y = e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- u oblasti $\mathbb{D}_2$ je
$$y = -e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- Rješenje je i funkcija $y = 0$, $t \in \mathbb{I}$

Oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja HLDJ je

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

- u oblasti $\mathbb{D}_1$ je
$$y = e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- u oblasti $\mathbb{D}_2$ je
$$y = -e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- Rješenje je i funkcija $y = 0$, $t \in \mathbb{I}$

Oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja HLDJ je $\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

- u oblasti $\mathbb{D}_1$ je
$$y = e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- u oblasti $\mathbb{D}_2$ je
$$y = -e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- Rješenje je i funkcija $y = 0$, $t \in \mathbb{I}$

Oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja HLDJ je $\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$ i opšte rješenje:

Opšte rješenje homogene linearne DJ:

- u oblasti $\mathbb{D}_1$ je
$$y = e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- u oblasti $\mathbb{D}_2$ je
$$y = -e^{-\int P(t)dt} \cdot C$$
- Rješenje je i funkcija $y = 0$, $t \in \mathbb{I}$

Oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja HLDJ je $\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$ i opšte rješenje:
$$y = Ce^{-\int P(t)dt},$$
gdje je $C$ proizvoljna konstanta.

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

- Rješenje tražimo u obliku:

$$y = C(t)e^{-\int P(t)dt}, \tag{3}$$

gdje je $C(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

- Rješenje tražimo u obliku:

$$y = C(t)e^{-\int P(t)dt}, \tag{3}$$

  gdje je $C(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija
- Zamjenom $y$ iz (3) u (1) dobijamo:

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

- Rješenje tražimo u obliku:

$$y = C(t)e^{-\int P(t)dt}, \tag{3}$$

  gdje je $C(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija
- Zamjenom $y$ iz (3) u (1) dobijamo:

$$C'(t) = Q(t)e^{P(t)dt}$$

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

- Rješenje tražimo u obliku:

$$y = C(t)e^{-\int P(t)dt}, \tag{3}$$

  gdje je $C(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija
- Zamjenom $y$ iz (3) u (1) dobijamo:

$$C'(t) = Q(t)e^{P(t)dt}$$

  Ovo je DJ sa razdvojenim promjenljivim i njeno rješenje je:

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

- Rješenje tražimo u obliku:

$$y = C(t)e^{-\int P(t)dt}, \tag{3}$$

  gdje je $C(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija
- Zamjenom $y$ iz (3) u (1) dobijamo:

$$C'(t) = Q(t)e^{P(t)dt}$$

  Ovo je DJ sa razdvojenim promjenljivim i njeno rješenje je:

$$C(t) = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

- Rješenje tražimo u obliku:

$$y = C(t)e^{-\int P(t)dt}, \tag{3}$$

  gdje je $C(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija

- Zamjenom $y$ iz (3) u (1) dobijamo:

$$C'(t) = Q(t)e^{P(t)dt}$$

  Ovo je DJ sa razdvojenim promjenljivim i njeno rješenje je:

$$C(t) = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

- Zamjenom $C(t)$ u (3) :

Prethodna formula se može iskoristiti za nalaženje opšteg rješenja LDJ (metod varijacije konstanti):

- Rješenje tražimo u obliku:

$$y = C(t)e^{-\int P(t)dt}, \tag{3}$$

gdje je $C(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija

- Zamjenom $y$ iz (3) u (1) dobijamo:

$$C'(t) = Q(t)e^{P(t)dt}$$

Ovo je DJ sa razdvojenim promjenljivim i njeno rješenje je:

$$C(t) = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

- Zamjenom $C(t)$ u (3) :

**Opšte rješenje LDJ**

$$y = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + \gamma\right)$$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

- $y' = u'v + uv'$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

- $y' = u'v + uv'$
- $u'v + uv' + P(t)uv = Q(t)$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

- $y' = u'v + uv'$
- $u'v + uv' + P(t)uv = Q(t)$ ili $u'v + u\underbrace{(v' + P(t)v)}_{=0} = Q(t)$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

- $y' = u'v + uv'$
- $u'v + uv' + P(t)uv = Q(t)$ ili $u'v + u\underbrace{(v' + P(t)v)}_{=0} = Q(t)$
- $v = e^{-\int P(t)dt}$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

- $y' = u'v + uv'$
- $u'v + uv' + P(t)uv = Q(t)$ ili $u'v + u\underbrace{(v' + P(t)v)}_{=0} = Q(t)$
- $v = e^{-\int P(t)dt}$
- $u'e^{-\int P(t)dt} = Q(t)$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

- $y' = u'v + uv'$
- $u'v + uv' + P(t)uv = Q(t)$ ili $u'v + u\underbrace{(v' + P(t)v)}_{=0} = Q(t)$
- $v = e^{-\int P(t)dt}$
- $u'e^{-\int P(t)dt} = Q(t)$
- $u = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + \gamma$

# Drugi način za nalaženje opšteg rješenja LDJ:

- Rješenje tražimo u obliku

$$y = uv, \quad u = u(t), v = v(t), uv \neq 0$$

- $y' = u'v + uv'$
- $u'v + uv' + P(t)uv = Q(t)$ ili $u'v + u\underbrace{(v' + P(t)v)}_{=0} = Q(t)$
- $v = e^{-\int P(t)dt}$
- $u'e^{-\int P(t)dt} = Q(t)$
- $u = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + \gamma$

$$y = uv = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + \gamma\right)$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ LDJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ LDJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Tada se dobija

$$y_p' + u' + Py_p + Pu = Q$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ LDJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Tada se dobija

$$y_p' + u' + Py_p + Pu = Q$$

$$\underbrace{(y_p' + Py_p - Q)}_{=0} + u' + Pu = 0$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ LDJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Tada se dobija

$$y_p' + u' + Py_p + Pu = Q$$

$$\underbrace{(y_p' + Py_p - Q)}_{=0} + u' + Pu = 0$$

$$u = e^{-\int P(t)dt} + \gamma$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ LDJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Tada se dobija

$$y_p' + u' + Py_p + Pu = Q$$

$$\underbrace{(y_p' + Py_p - Q)}_{=0} + u' + Pu = 0$$

$$u = e^{-\int P(t)dt} + \gamma$$

Tada je opšte rješenje

$$y = e^{-\int P(t)dt} + y_p + \gamma$$

## Bernulijeva DJ

$$y' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq \{0, 1\}, \quad P, Q \in C(\mathbb{I})$$

## Bernulijeva DJ

$$y' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq \{0, 1\}, \quad P, Q \in C(\mathbb{I})$$

Smjena: $u = y^{1-\alpha}$,

## Bernulijeva DJ

$$y' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq \{0,1\}, \quad P, Q \in C(\mathbb{I})$$

Smjena: $u = y^{1-\alpha}$, tj. $y' = \frac{y^{\alpha}}{1-\alpha} u'$

## Bernulijeva DJ

$$y' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq \{0,1\}, \quad P, Q \in C(\mathbb{I})$$

Smjena: $u = y^{1-\alpha}$, tj. $y' = \frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}u'$

$$\frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}u' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha} \qquad \Big| \cdot \frac{1-\alpha}{y^{\alpha}}$$

## Bernulijeva DJ

$$y' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq \{0,1\}, \quad P, Q \in C(\mathbb{I})$$

Smjena: $u = y^{1-\alpha}$, tj. $y' = \frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}u'$

$$\frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}u' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha} \qquad \Big| \cdot \frac{1-\alpha}{y^{\alpha}}$$

## LDJ

$$u' + P(t)(1-\alpha)u = Q(t)(1-\alpha)$$

## Rikatijeva DJ

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

## Rikatijeva DJ

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ Rikatijeve DJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

## Rikatijeva DJ

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ Rikatijeve DJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Tada se dobija

$$y_p' + u' = Py_p^2 + 2Py_pu + Pu^2 + Qy_p + Qu + R$$

## Rikatijeva DJ

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ Rikatijeve DJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Tada se dobija

$$y_p' + u' = Py_p^2 + 2Py_pu + Pu^2 + Qy_p + Qu + R$$

$$y_p' + u' = \underbrace{(Py_p^2 + Qy_p + R)}_{=y_p'} + (2Py_p + Q)u + Pu^2$$

## Rikatijeva DJ

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

Ako je poznato jedno partikularno rješenje $y_p$ Rikatijeve DJ uvodi se smjena

$$y = y_p + u, \quad u = u(t).$$

Tada se dobija

$$y_p' + u' = Py_p^2 + 2Py_pu + Pu^2 + Qy_p + Qu + R$$

$$y_p' + u' = \underbrace{(Py_p^2 + Qy_p + R)}_{=y_p'} + (2Py_p + Q)u + Pu^2$$

$$u' - \underbrace{(2Py_p + Q)}\, u = Pu^2$$

Primjer 1: Ako su poznata dva partikularna rješenja $y_1(t)$ i $y_2(t)$ Rikatijeve DJ

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

tada je opšte rješenje

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int P(t)(y_1 - y_2)dt}$$

Primjer 2: Pokazati da se LDJ drugog reda

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

smjenom $y = e^{\int f(t)x(t)dt}$ svodi na Rikatijevu DJ.

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t,y) \in \mathbb{D} : P(t,y) = 0 \text{ i } Q(t,y) = 0\}$

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t, y) \in \mathbb{D} : P(t, y) = 0 \text{ i } Q(t, y) = 0\}$ - zatvoren skup

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t,y) \in \mathbb{D} : P(t,y) = 0 \text{ i } Q(t,y) = 0\}$ - zatvoren skup
- Tačke skupa $\mathbb{S}$ su singularne tačke (nema jedinstvenog rješenja)

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t,y) \in \mathbb{D} : P(t,y) = 0 \text{ i } Q(t,y) = 0\}$ - zatvoren skup
- Tačke skupa $\mathbb{S}$ su singularne tačke (nema jedinstvenog rješenja)
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S}$

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t, y) \in \mathbb{D} : P(t, y) = 0 \text{ i } Q(t, y) = 0\}$ - zatvoren skup
- Tačke skupa $\mathbb{S}$ su singularne tačke (nema jedinstvenog rješenja)
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S}$ - otvoren skup, ali ne mora da bude povezan

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t, y) \in \mathbb{D} : P(t, y) = 0 \text{ i } Q(t, y) = 0\}$ - zatvoren skup
- Tačke skupa $\mathbb{S}$ su singularne tačke (nema jedinstvenog rješenja)
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S}$ - otvoren skup, ali ne mora da bude povezan
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S} = \cup_{i=1}^{n} \mathbb{G}_i$ razbijemo na djelove koji su sami za sebe oblasti

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t,y) \in \mathbb{D} : P(t,y) = 0 \text{ i } Q(t,y) = 0\}$ - zatvoren skup
- Tačke skupa $\mathbb{S}$ su singularne tačke (nema jedinstvenog rješenja)
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S}$ - otvoren skup, ali ne mora da bude povezan
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S} = \cup_{i=1}^{n} \mathbb{G}_i$ razbijemo na djelove koji su sami za sebe oblasti
- Posmatramo jednu od ovih oblasti $\mathbb{G}_i$ i $y' = -\frac{P(t,y)}{Q(t,y)}$ ili $t' = -\frac{Q(t,y)}{P(t,y)}$

## DJ u simetričnom obliku

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$$

- Pretpostavimo da $P, Q \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{S} = \{(t,y) \in \mathbb{D} : P(t,y) = 0 \text{ i } Q(t,y) = 0\}$ - zatvoren skup
- Tačke skupa $\mathbb{S}$ su singularne tačke (nema jedinstvenog rješenja)
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S}$ - otvoren skup, ali ne mora da bude povezan
- $\mathbb{D} \setminus \mathbb{S} = \cup_{i=1}^{n} \mathbb{G}_i$ razbijemo na djelove koji su sami za sebe oblasti
- Posmatramo jednu od ovih oblasti $\mathbb{G}_i$ i $y' = -\frac{P(t,y)}{Q(t,y)}$ ili $t' = -\frac{Q(t,y)}{P(t,y)}$
- Primijeniti neku od teorema za DJ u normalnom obliku

Primjer: $(2t+y^2)\,dt + \;\; 2ty \;\; dy = 0$ - DJ u simetričnom obliku

Primjer: $\underbrace{(2t+y^2)}_{P(t,y)}\,dt + \underbrace{2ty}_{Q(t,y)}\,dy = 0$ - DJ u simetričnom obliku

- Postoji li funkcija $U(t,y)$ t.d. $\frac{\partial U}{\partial t} = P$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ ?

Primjer: $\underbrace{(2t + y^2)}_{P(t,y)}\, dt + \underbrace{2ty}_{Q(t,y)}\, dy = 0$ - DJ u simetričnom obliku

- Postoji li funkcija $U(t, y)$ t.d. $\frac{\partial U}{\partial t} = P$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ ?
- $U(t, y) = t^2 + ty^2$

Primjer: $\underbrace{(2t+y^2)}_{P(t,y)}dt + \underbrace{2ty}_{Q(t,y)}dy = 0$ - DJ u simetričnom obliku

- Postoji li funkcija $U(t,y)$ t.d. $\frac{\partial U}{\partial t} = P$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ ?
- $U(t,y) = t^2 + ty^2$
- $\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$

Primjer: $\underbrace{(2t+y^2)}_{P(t,y)}\,dt + \underbrace{2ty}_{Q(t,y)}\,dy = 0$ - DJ u simetričnom obliku

- Postoji li funkcija $U(t,y)$ t.d. $\frac{\partial U}{\partial t} = P$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ ?
- $U(t,y) = t^2 + ty^2$
- $\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$
- $dU = 0$ - totalni diferencijal funkcije $U$

Primjer: $\underbrace{(2t+y^2)}_{P(t,y)}\,dt + \underbrace{2ty}_{Q(t,y)}\,dy = 0$ - DJ u simetričnom obliku

- Postoji li funkcija $U(t,y)$ t.d. $\frac{\partial U}{\partial t} = P$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ ?
- $U(t,y) = t^2 + ty^2$
- $\frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0$
- $dU = 0$ - totalni diferencijal funkcije $U$
- $U = C$ - rješenje

**Rješenje početne DJ**

$$t^2 + ty^2 = C$$

Teorema: Neka su funkcije $P$, $Q$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ neprekidne u oblasti $\mathbb{G}$. Tada jednačina

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0$$

je jednačina sa totalnim diferencijalom akko

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t}, \ \forall (t,y) \in \mathbb{G}$$

## Kako naći funkciju $U$?

## Kako naći funkciju $U$?

- Ako je jednačina sa totalnim diferencijalom tada važi:

$$\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = P(t, y)dt + Q(t, y)dy$$

## Kako naći funkciju $U$?

- Ako je jednačina sa totalnim diferencijalom tada važi:

$$\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = P(t, y)dt + Q(t, y)dy$$

- Zaključujemo da je $\frac{\partial U}{\partial t} = P(t, y)$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(t, y)$.

## Kako naći funkciju $U$?

- Ako je jednačina sa totalnim diferencijalom tada važi:

$$\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = P(t,y)dt + Q(t,y)dy$$

- Zaključujemo da je $\frac{\partial U}{\partial t} = P(t,y)$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(t,y)$.
- Iz prve jednakosti dobijamo $U = \int P(t,y)dt + C(y)$

## Kako naći funkciju $U$?

- Ako je jednačina sa totalnim diferencijalom tada važi:

$$\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = P(t,y)dt + Q(t,y)dy$$

- Zaključujemo da je $\frac{\partial U}{\partial t} = P(t,y)$ i $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(t,y)$.
- Iz prve jednakosti dobijamo $U = \int P(t,y)dt + C(y)$
- $C(y)$ odredjujemo tako što dobijeno $U$ zamijenimo u drugu nejednakost

$$Q(t,y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right) + C'(y)$$

$C'(y) = Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right)$- DJ sa razdv. prom.

$C'(y) = Q(t, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t, y)dt\right)$- DJ sa razdv. prom.

$$C(y) = \int \left( Q(t, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t, y)dt\right)\right) dy + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

$C'(y) = Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right)$- DJ sa razdv. prom.

$$C(y) = \int \left( Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right)\right) dy + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Zamijenimo u $U$ i dobijamo

$$U = \int P(t,y)dt + \int \left( Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right)\right) dy + \gamma$$

## Rješenje DJ sa totalnim diferencijalom

$$\int P(t,y)dt + \int \left( Q(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(t,y)dt\right)\right) dy = const$$

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0 \tag{4}$$

- ako nije jednačina sa totalnim diferencijalom,

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0 \tag{4}$$

- ako nije jednačina sa totalnim diferencijalom, tražimo funkciju $\mu(t,y)$ tako da jednačina

$$\mu(t,y)P(t,y)dt + \mu(t,y)Q(t,y)dy = 0 \tag{5}$$

bude jednačina sa totalnim diferencijalom.

Funkciju $\mu = \mu(t,y)$ definisanu, neprekidnu i različitu od nule u oblasti $\mathbb{D}$ nazivamo **integracionim faktorom** jednačine (4) ako je jednačina (5) jednačina sa totalnim diferencijalom.

Kako naći funkciju $\mu = \mu(t, y)$?

## Kako naći funkciju $\mu = \mu(t, y)$?

- $\mu P dt + \mu Q dy = 0$ - j-na sa totalnim diferencijalom

## Kako naći funkciju $\mu = \mu(t, y)$?

- $\mu P dt + \mu Q dy = 0$ - j-na sa totalnim diferencijalom

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

## Kako naći funkciju $\mu = \mu(t, y)$?

- $\mu P dt + \mu Q dy = 0$ - j-na sa totalnim diferencijalom

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial t}$$

## Kako naći funkciju $\mu = \mu(t, y)$?

- $\mu P dt + \mu Q dy = 0$ - j-na sa totalnim diferencijalom

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P - \frac{\partial \mu}{\partial t} Q = \mu \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

## Kako naći funkciju $\mu = \mu(t, y)$?

- $\mu P dt + \mu Q dy = 0$ - j-na sa totalnim diferencijalom

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P - \frac{\partial \mu}{\partial t} Q = \mu \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Pretpostavimo da postoji funkcija $\omega = \omega(t, y)$ tako da $\mu = \mu(\omega)$.

## Kako naći funkciju $\mu = \mu(t, y)$?

- $\mu P dt + \mu Q dy = 0$ - j-na sa totalnim diferencijalom

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} P - \frac{\partial \mu}{\partial t} Q = \mu \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Pretpostavimo da postoji funkcija $\omega = \omega(t, y)$ tako da $\mu = \mu(\omega)$. Tada je

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q\frac{\partial \omega}{\partial t} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = g(\omega) d\omega$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q\frac{\partial \omega}{\partial t} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = g(\omega) d\omega$$

$\omega$ biramo tako da $g(\omega)d\omega$ lako integralimo:

$$\mu = e^{\int g(\omega)d\omega}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q\frac{\partial \omega}{\partial t} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = g(\omega) d\omega$$

$\omega$ biramo tako da $g(\omega)d\omega$ lako integralimo:

$$\mu = e^{\int g(\omega) d\omega}$$

Specijalno, za $\omega = t$ (ili $\omega = y$) imamo

$$g(t) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} \quad \left( ili \quad g(y) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \right)$$

Riješiti DJ:

$$(3t^2 \cos y - \sin y) \cos y dt - t dy = 0.$$

Pokazati da su sve DJ sa razdvojenim promjenljivim jednačine sa totalnim diferencijalom.

Naći integracioni faktor jednačine

$$(y^4 - 4ty)dt + (2ty^3 - 3t^2)dy = 0.$$

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

**Primjer 1:** $y'^2 + 1 = 0$

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

**Primjer 1:** $y'^2 + 1 = 0$ - nema rješenja u skupu realnih funkcija

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

**Primjer 1:** $y'^2 + 1 = 0$ - nema rješenja u skupu realnih funkcija
**Primjer 2:** $y'^2 - 1 = 0$

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

**Primjer 1:** $y'^2 + 1 = 0$ - nema rješenja u skupu realnih funkcija
**Primjer 2:** $y'^2 - 1 = 0$ ili $(y' - 1)(y' + 1) = 0$,

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

**Primjer 1:** $y'^2 + 1 = 0$ - nema rješenja u skupu realnih funkcija
**Primjer 2:** $y'^2 - 1 = 0$ ili $(y' - 1)(y' + 1) = 0$, tj. $y' = 1$ i $y' = -1$

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

**Primjer 1:** $y'^2 + 1 = 0$ - nema rješenja u skupu realnih funkcija
**Primjer 2:** $y'^2 - 1 = 0$ ili $(y' - 1)(y' + 1) = 0$, tj. $y' = 1$ i $y' = -1$

U opštem slučaju: $y' = f_k(t, y)$, $k = 1, \ldots, m$.

$$F(t, y, y') = 0 \tag{6}$$

- ne možemo na jednoznačan način napisati kao $y' = f(t, y)$
- 2 glavna metoda rješavanja:

**1.** J-nu (6) razbijemo na više DJ u normalnom obliku

**Primjer 1:** $y'^2 + 1 = 0$ - nema rješenja u skupu realnih funkcija
**Primjer 2:** $y'^2 - 1 = 0$ ili $(y' - 1)(y' + 1) = 0$, tj. $y' = 1$ i $y' = -1$

U opštem slučaju: $y' = f_k(t, y)$, $k = 1, \dots, m$. Nadjemo rješenja $\varphi_k(t, y) = C$, $k = 1, \dots, m$ svake od ovih Dj u normalnom obliku. Tada je opšte rješenje:
$(\varphi_1(t, y) - C) \cdot \ldots \cdot (\varphi_k(t, y) - C) = 0$

**2.** Uvodimo parametrizaciju

## Lagranžova DJ

$$y = tf(y') + g(y'), \quad f(u) \neq u$$

- Uvodimo parametrizaciju: $y' = p$, tj. $dy = pdt$

$$y = tf(p) + g(p)$$

$$dy = f(p)dt + tf'(p)dp + g'(p)dp$$

$$\underbrace{(p - f(p))}_{\neq 0} dt = (tf'(p) + g'(p))dp$$

## LDJ

$$t' - \frac{f'(p)}{p - f(p)} t = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

Rješenje: $t = \varphi(p, C)$, $y = \varphi(p, C) \cdot f(p) + g(p)$

## Klerova DJ

$$y = ty' + g(y')$$

- Uvodimo parametrizaciju: $y' = p$, tj. $dy = pdt$

$$y = tp + g(p)$$
$$pdt = dy = pdt + tdp + g'(p)dp$$
$$(t + g'(p))dp = 0$$

Odavde slijedi $p = C$ ili $g'(p) + t = 0$. U prvom slučaju, rješenja Klerove DJ je familija pravih

$$y = Ct + g(C),$$

a u drugom je rješenje (u parametarskom obliku):

$$t = -g'(p), \quad y = -pg'(p) + g(p).$$

Riješiti jednačine:

$$t = y'^3 + y'$$

$$y'^3 = 3(ty' - y)$$